Concours National d'admission 1987

MATHÉMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet, seront distribuées :

— une feuille de papier logarithmique ;

— une feuille de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuilles supplémentaires.

Des tables numériques pouvant permettre de traiter certaines questions sont également jointes au sujet

L'utilisation de papiers graphiques ou de tables apportés par le candidat sera assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

Les candidats doivent IMPÉRATIVEMENT respecter la précision demandée dans les résultats numériques.

PROBLÈME I *(sur 9 points)*

I. Les calculs seront présentés sous forme de tableau ; les nombres figurant dans le tableau seront arrondis à 10^{-2} près au plus proche et les calculs seront effectués à partir de ces valeurs. Les résultats, à l'exception de k, seront donnés avec cette précision. Toutes les formules utilisées devront être citées.

PLAN DE COMMERCIALISATION D'UN VÉHICULE NOUVEAU

Mois	11-85	12-85	01-86	02-86	03-86	04-86	05-86
Rang du mois t_i	1	2	3	4	5	6	7
Fabrication y_i	150	292	2900	7620	9224	14822	13271

1° Sur papier logarithmique représenter le nuage de points $M_i(t_i, Y_i)$ où les Y_i représentent les effectifs cumulés de la fabrication.

2° On pose $u_i = \log t_i$, $v_i = \log Y_i$ (la notation log représente le logarithme décimal). Afin de vérifier la validité d'un ajustement linéaire de ce nuage, calculer le coefficient de corrélation linéaire entre u et v.

3° Déterminer une équation de la droite de régression de v en u ; tracer cette droite sur le graphique précédent, après en avoir déterminé deux points.

4° En déduire entre Y et t une relation de la forme $Y = kt^{\alpha}$ (k sera arrondi à une unité près au plus proche).

5° Donner une estimation de la production du mois de juin 1986.

II. On suppose que la probabilité pour qu'un client ayant passé commande d'une voiture soit livré avec retard est de 0,62.

1° Un concessionnaire prend 200 commandes. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de clients livrés sans retard.

Déterminer la loi de X. Donner l'expression de $P(X = k)$ en fonction de k.

Calculer l'espérance et la variance de X. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près au plus proche de l'écart-type de X.

2° Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? (On justifiera cette approximation.) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près au plus proche de $P(X \leqslant 60)$ et de $P(X \geqslant 80)$.

Tournez la page S.V.P.

III. Un concessionnaire enregistre 4 commandes.

2 couleurs A et B sont disponibles.

20 % des clients choisissent la couleur A.

80 % des clients choisissent la couleur B.

Y_1 est la variable aléatoire représentant le nombre de commandes pour la couleur A.

Y_2 est la variable aléatoire représentant le nombre de commandes pour la couleur B.

1° Déterminer la loi de Y_1 et celle de Y_2. Calculer les espérances de Y_1 et Y_2.

2° On suppose que le concessionnaire a en stock 2 voitures de couleur A et 2 voitures de couleur B

a. Soit Z la variable aléatoire représentant le nombre de voitures livrées.

Déterminer la loi de Z et son espérance. (On donnera les valeurs exactes.)

b. Un seul des quatre clients ayant passé commande n'a pu être livré

Calculer la probabilité que ce soit un client ayant choisi la couleur A à 10^{-3} près au plus proche

PROBLÈME II *(sur 11 points)*

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice N telle que $A = 2I + N$ (où I représente la matrice identité d'ordre 3). Calculer N^2 et N^3.

b. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 2^n I + n 2^{n-1} N + n(n-1) 2^{n-3} N^2$.

c. Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1}.

2° Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = (ax^2 + bx + c) e^{2x}$ où a, b, c sont des paramètres réels.

a. Démontrer qu'il existe trois réels a_1, b_1, c_1 tels que, pour tout x réel, $f'(x) = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) e^{2x}$. Exprimer a_1, b_1, c_1 en fonction de a, b, c. Écrire cette relation matriciellement.

b. Plus généralement, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f notée $f^{(n)}$ vérifie pour tout x réel $f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n) e^{2x}$, où a_n, b_n, c_n sont trois réels. Vérifier que pour tout $n \geq 2$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calculer a_n, b_n, c_n en fonction de a, b, c et n.

c. Montrer que f admet une primitive F vérifiant pour tout x réel $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^{2x}$, où α, β, γ sont trois réels que l'on déterminera en fonction de a, b, c.

3° *Application* : $a = 2$, $b = -2$, $c = 1$.

a. Étudier les variations de f. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

Étudier la dérivabilité de la bijection réciproque f^{-1} de f (on ne cherchera pas à expliciter f^{-1}).

b. Déterminer les points d'inflexion de la courbe (C) représentant les variations de f. Écrire une équation de la tangente en chacun de ces points.

c. Tracer (C) dans un repère orthonormé (unité : 5 cm) sur une feuille de papier millimétré fournie.

d. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

e. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ et celle de $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une solution réelle unique t. Donner un encadrement de t à 10^{-2} près.

• • •